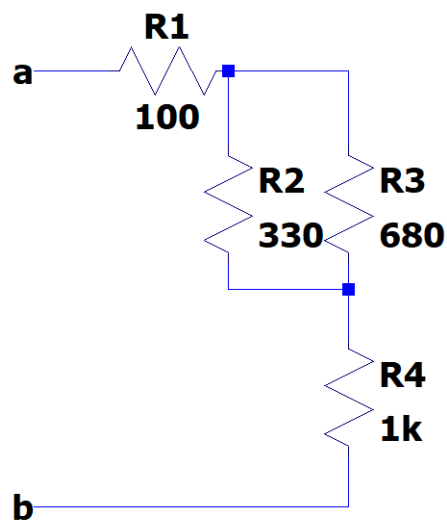




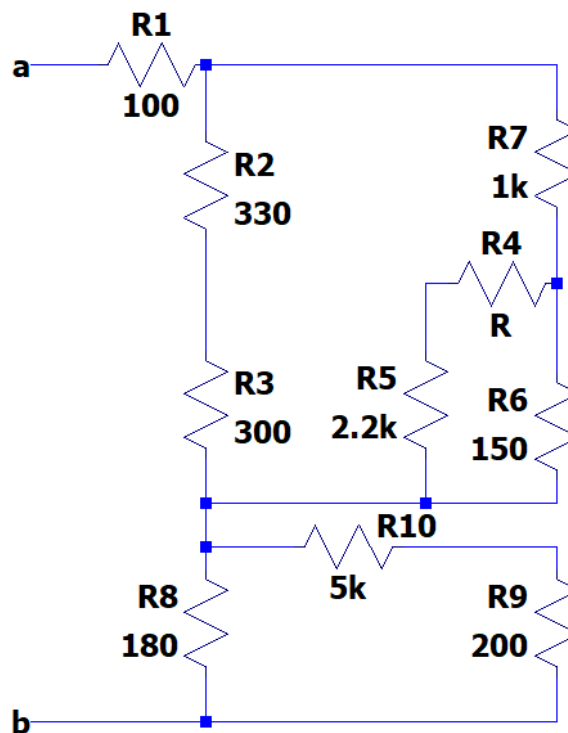
Lista de Exercícios – Análise de circuitos – ELTA00A

Questão 1) Determine a resistência equivalente R_{ab} :

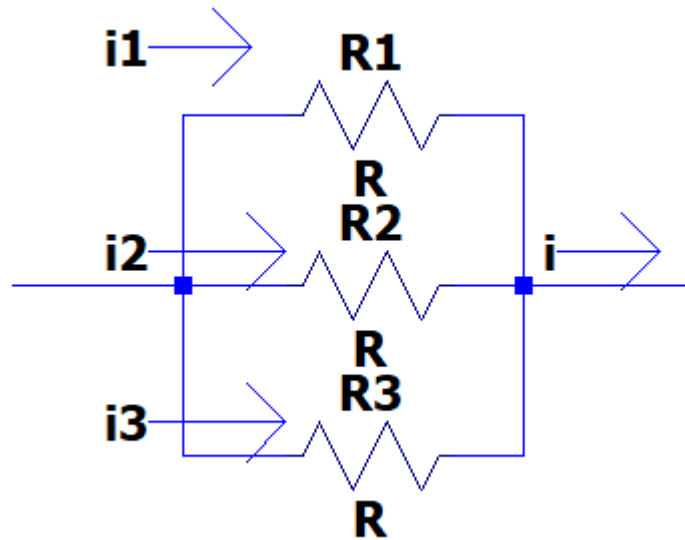
a)



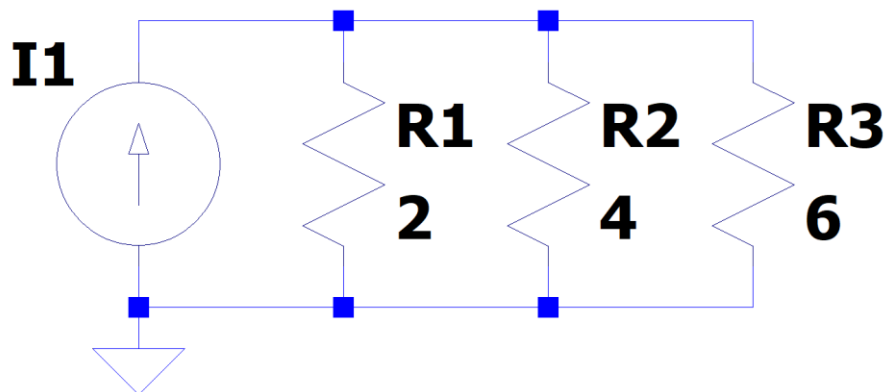
b) Considere $R_4 = 1\text{ k}\Omega$.



Questão 2) Determine as resistências R_1 , R_2 e R_3 , considerando $i = 5\text{ A}$, $V = 10\text{ V}$, $i_1 = 1\text{ A}$ e $i_3 = 1,8\text{ A}$.

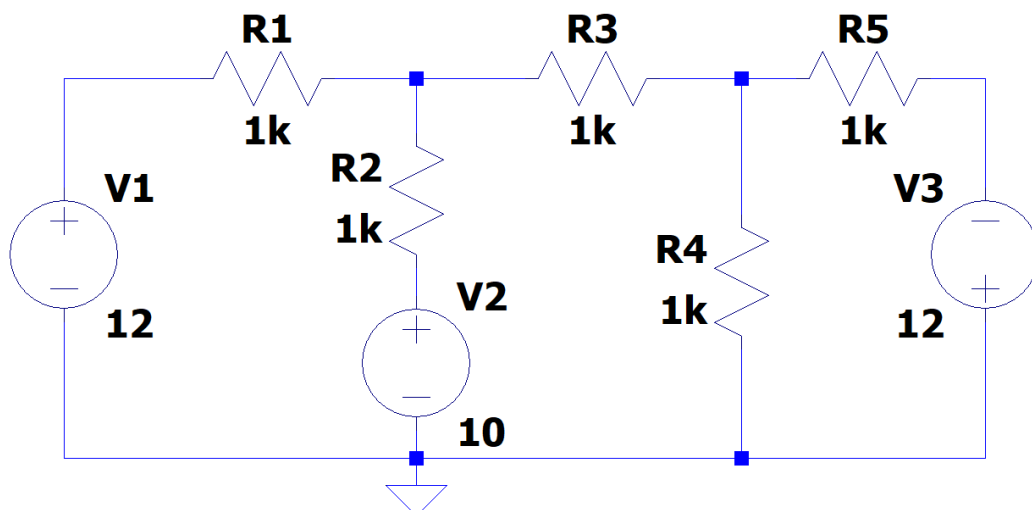


Questão 3) Considerando $i_2 = 3\text{ A}$ (corrente em R_2), determine a corrente total e a queda de tensão sobre cada resistor.

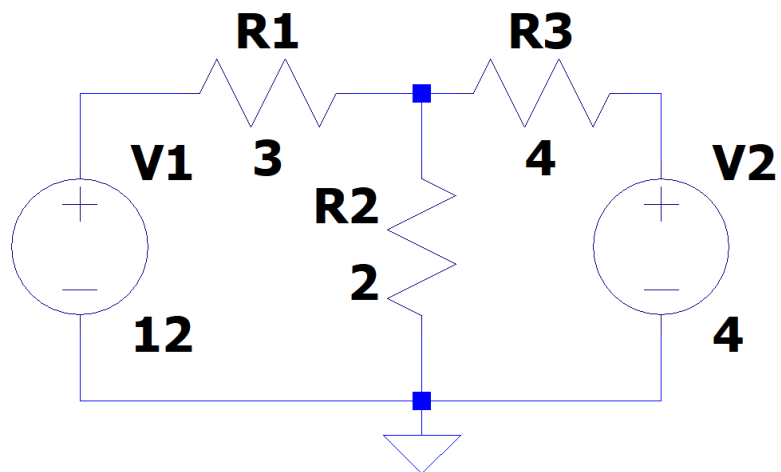


Questão 4) Faça a análise de malha para os circuitos abaixo:

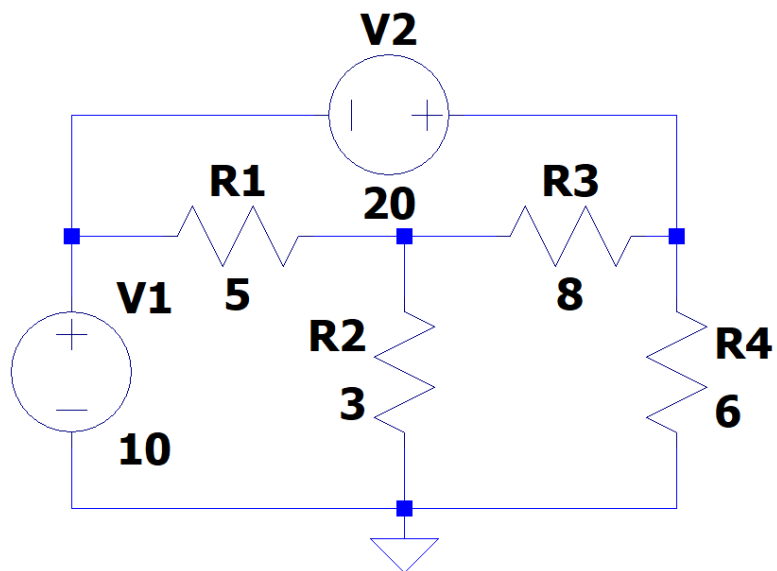
a)



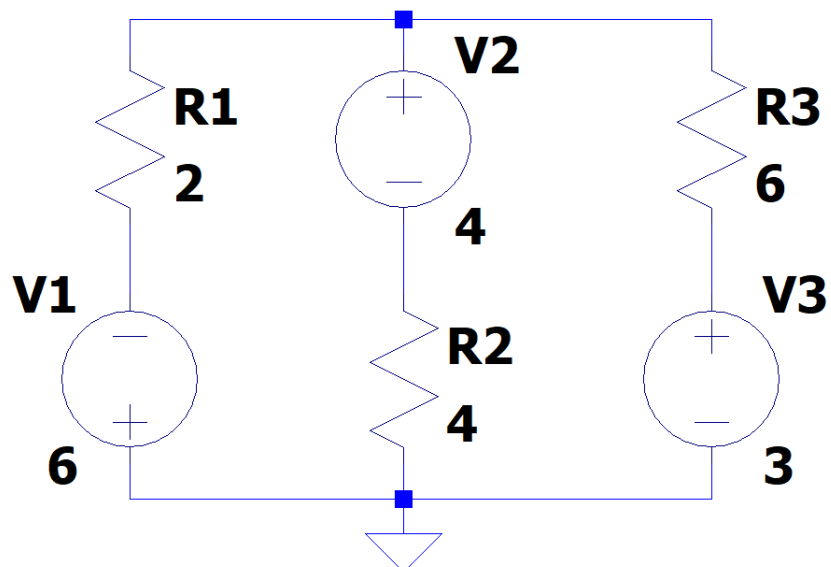
b)



c)

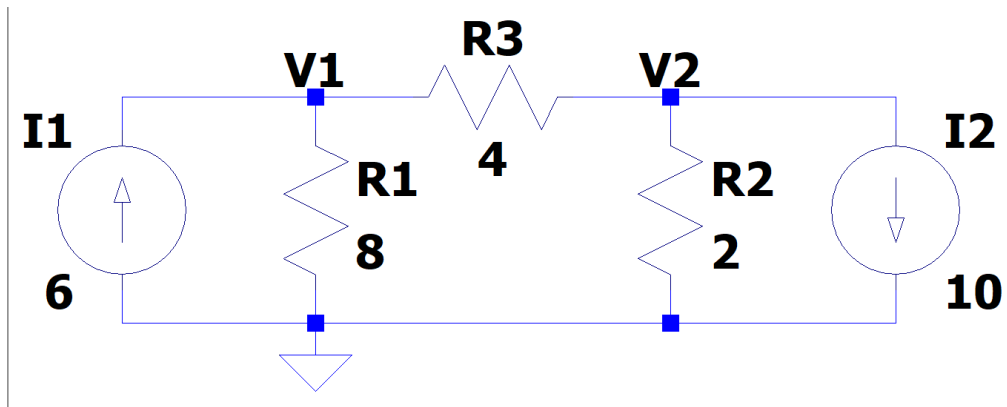


d)

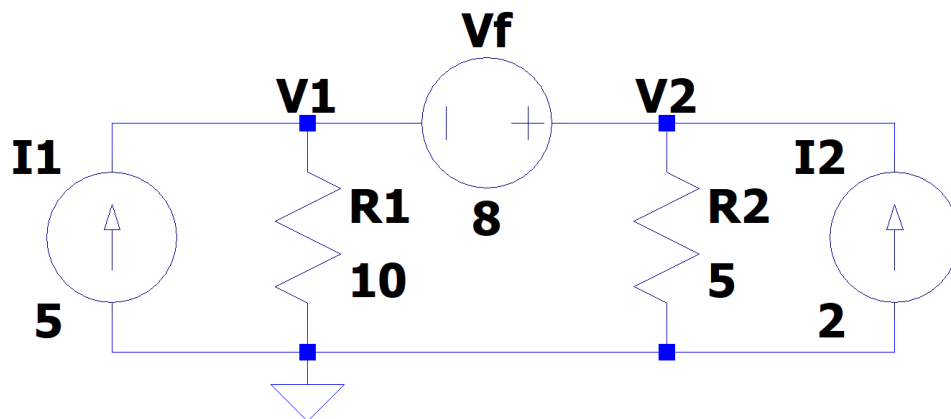


Questão 5) Faça a análise nodal para os circuitos abaixo:

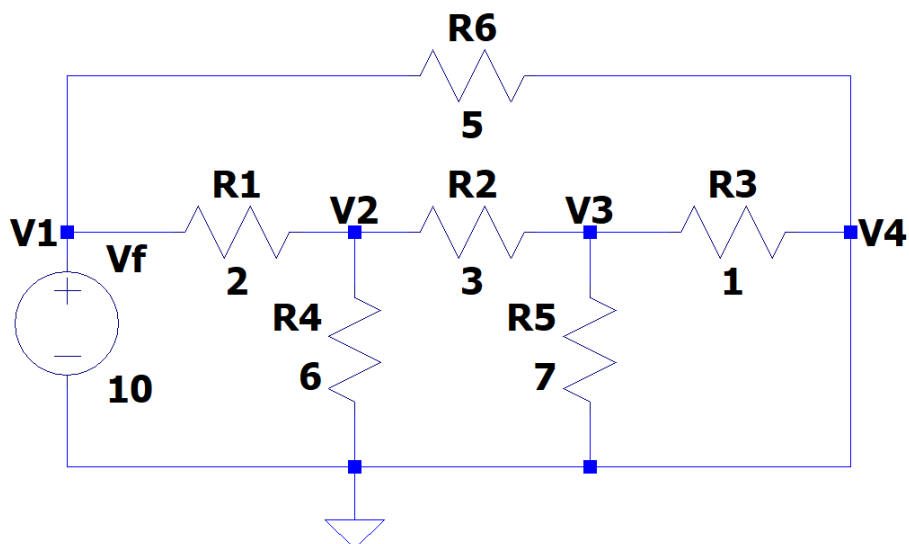
a)



b)

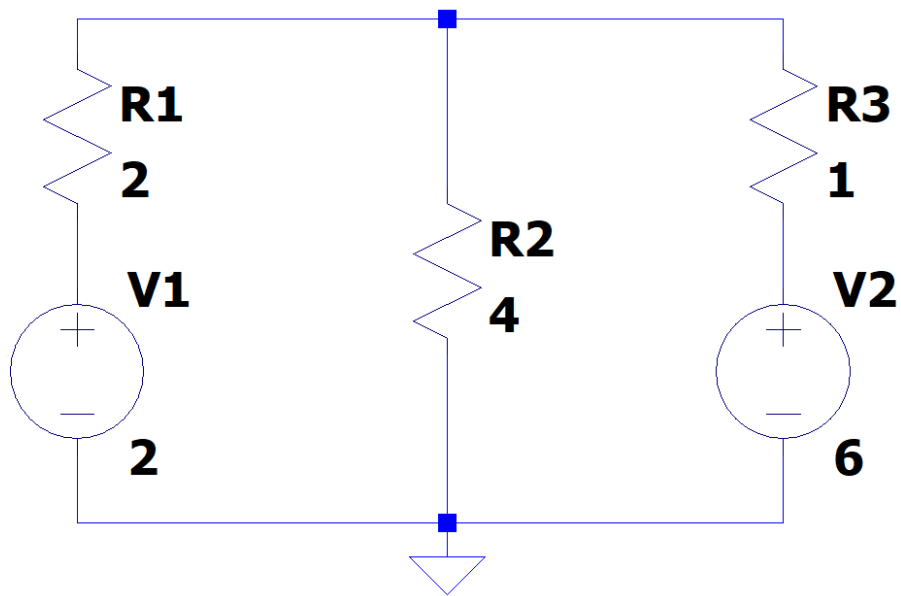


c)

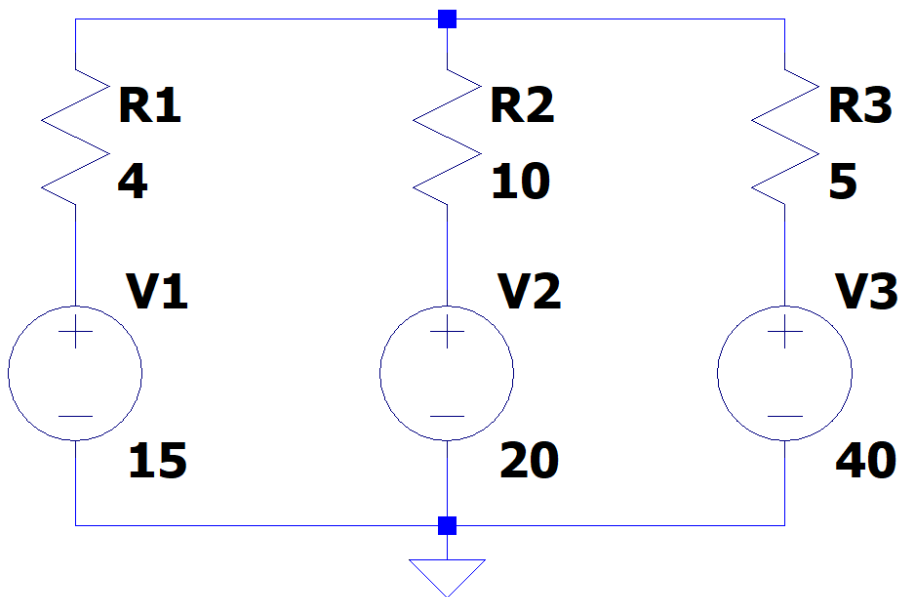


Questão 6) Determine as correntes nos ramos para os circuitos abaixo:

a)

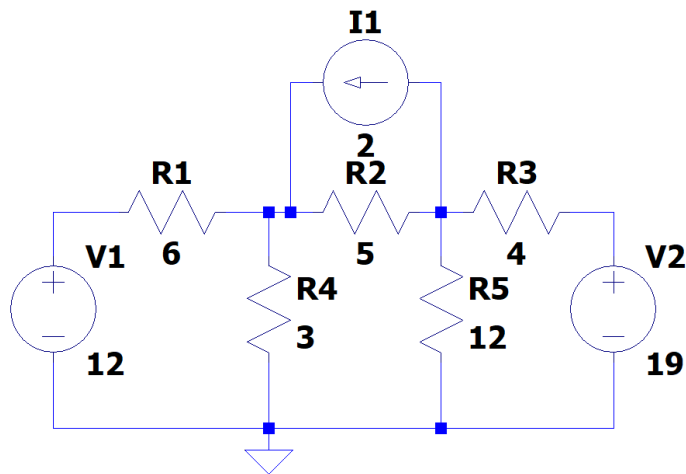


b) Considere $R_1 = 4 \Omega$, $R_2 = 10 \Omega$, $R_3 = 5 \Omega$, $V_1 = 15 V$, $V_2 = 20 V$ e $V_3 = 40 V$.

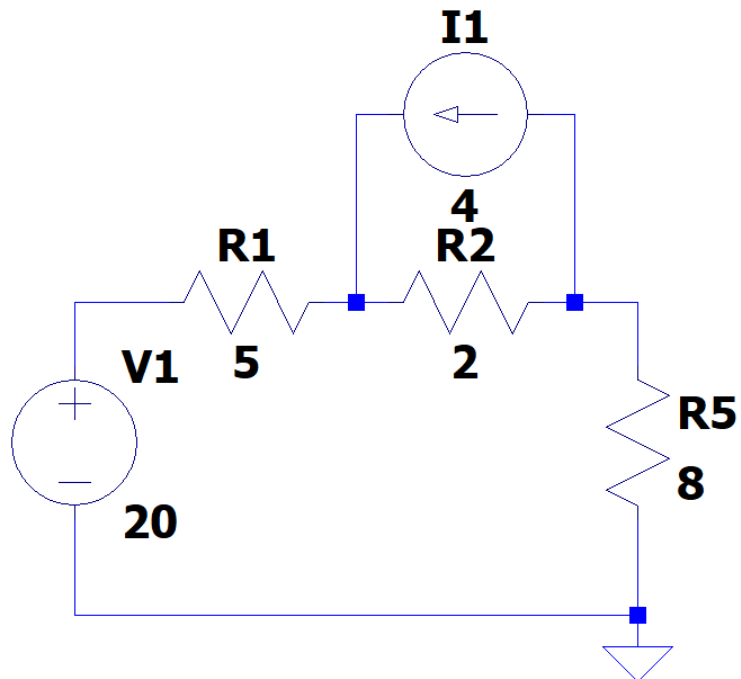


Questão 7) Utilizando o teorema da superposição, calcule o que se pede:

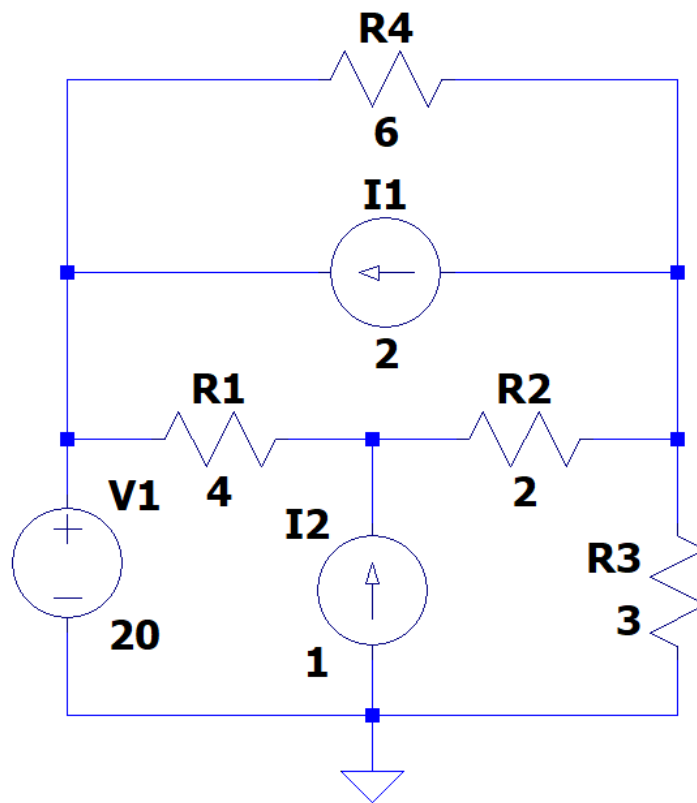
- a) A queda de tensão sobre R_2 , considerando $R_1 = 6\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 5\ \Omega$, $R_4 = 12\ \Omega$, $R_5 = 4\ \Omega$, $I_1 = 2\text{ A}$, $V_2 = 12\text{ V}$ e $V_1 = 19\text{ V}$.



- b) A queda de tensão sobre R_5 .

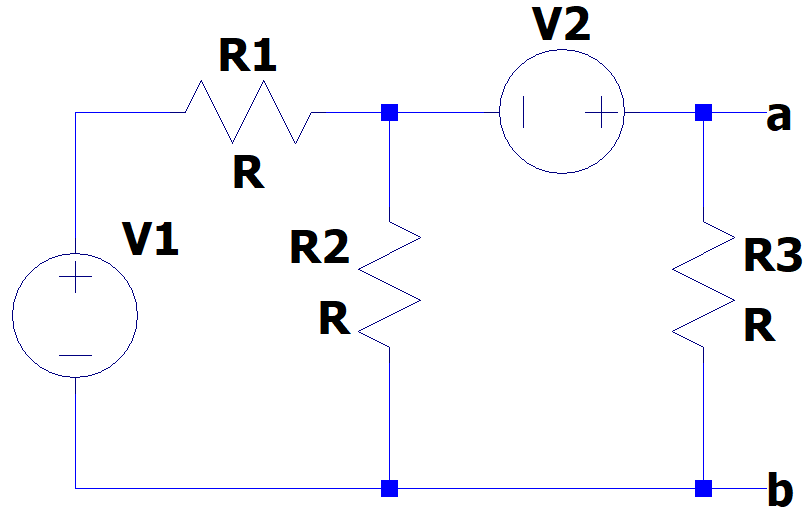


- c) A queda de tensão sobre R_3 .

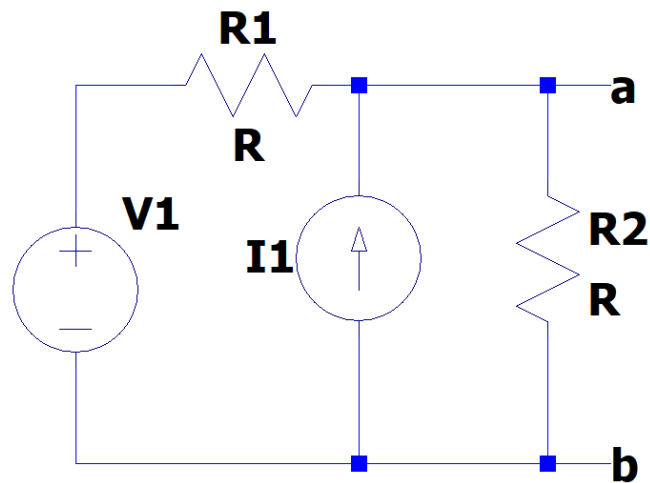


Questão 8) Determine os Equivalentes de Thévenin e Norton para os circuitos abaixo:

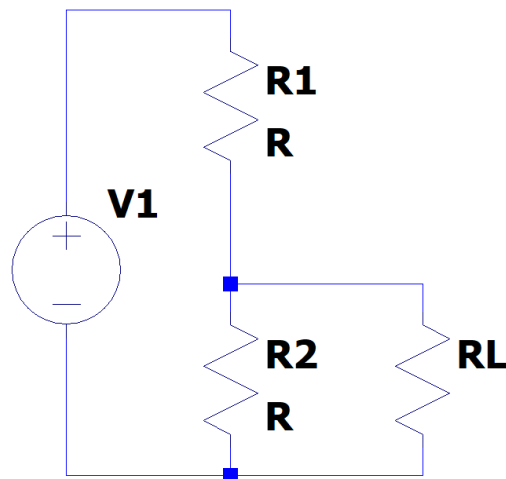
a) Considere $R1 = 5\text{ k}\Omega$, $R2 = 20\text{ k}\Omega$, $R3 = 40\text{ k}\Omega$, $V1 = 30\text{ V}$ e $V2 = 10\text{ V}$.



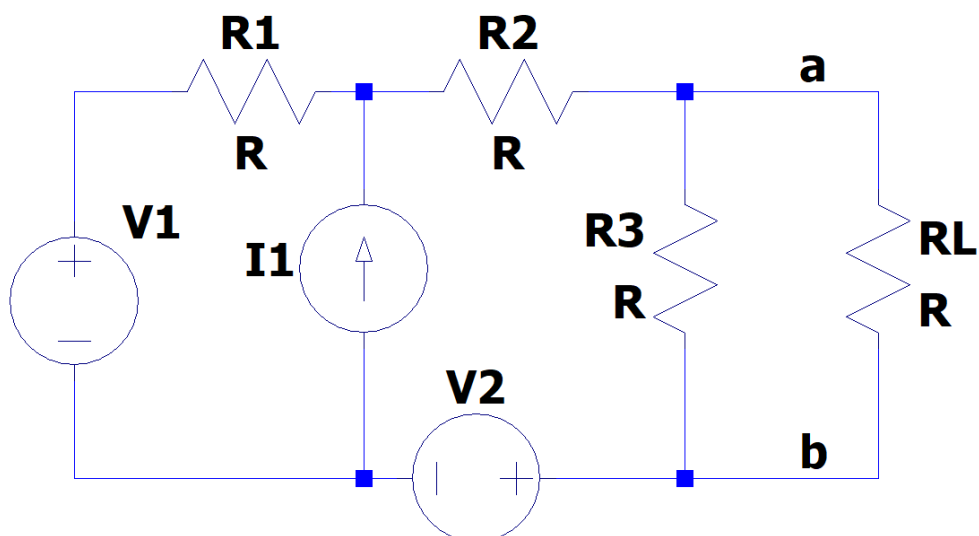
b) Considere $R1 = 300\text{ }\Omega$, $R2 = 560\text{ }\Omega$, $V1 = 12\text{ V}$ e $I1 = 2\text{ A}$.



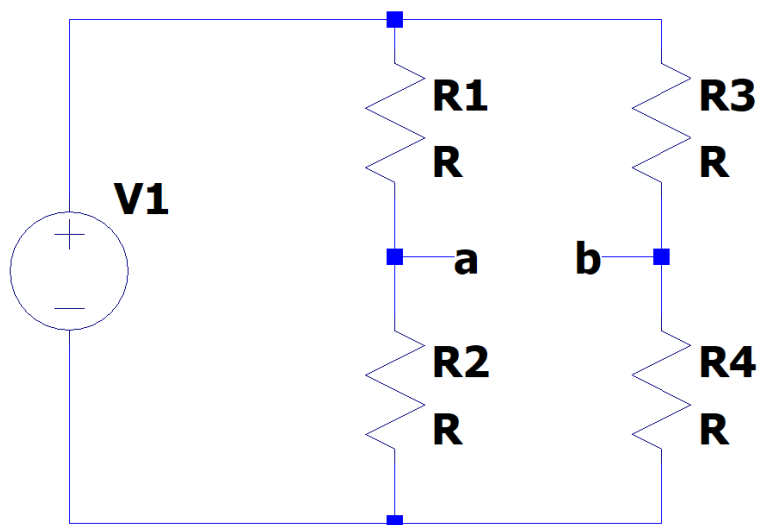
Questão 9) Utilizando o equivalente de Thévenin para o circuito mostrado abaixo, calcule a faixa de variação de V_L . Considere $R_1 = 330 \, \Omega$, $R_2 = 470 \, \Omega$, $R_L = 50 \, \Omega$ a $100 \, \Omega$ e $V_1 = 12 \, V$.



Questão 10) Utilizando o teorema de Thévenin nos terminais a-b do circuito abaixo, determine a tensão sobre R_L . Considere $R_1 = 5 \, \Omega$, $R_2 = 15 \, \Omega$, $R_3 = 10 \, \Omega$, $R_L = 8 \, \Omega$, $R_5 = 6 \, \Omega$, $R_6 = 2 \, \Omega$, $V_1 = 60 \, V$, $V_2 = 20 \, V$ e $I_1 = 2 \, A$.



Questão 11) Encontre o equivalente de Thévenin para o circuito abaixo, considerando $R_1 = 10 \Omega$, $R_2 = 50 \Omega$, $R_3 = 20 \Omega$, $R_4 = 40 \Omega$ e $V_1 = 9 V$.



Resoluções

Questão 1)

a) Analisando o circuito, a resistência entre a e b (R_{ab}) é igual a:

$$R_{ab} = R_1 + R_2 \parallel R_3 + R_4$$

$$R_{ab} = 100 + \frac{330 \times 680}{330 + 680} + 1000 = 1322,18 \Omega$$

b) Analisando o circuito:

Preimeiramente as resistências R_4 e R_5 estão em série e esta associação série está em paralelo com R_6 , assim:

$$R_{EQ1} = (R_4 + R_5) \parallel R_6 = (1000 + 2200) \parallel 150 = 143,28 \Omega$$

A resistência equivalente R_{EQ1} está em série com R_7 e esta associação está em paralelo com $(R_2 + R_3)$, assim:

$$R_{EQ2} = (R_{EQ1} + R_7) \parallel (R_2 + R_3) = 418,44 \Omega$$

Ainda R_{10} está em série com R_9 e esta associação está em paralelo com R_8 , então:

$$R_{EQ3} = (R_{10} + R_9) \parallel R_8 = 173,98 \Omega$$

Por fim, a resistência R_{ab} :

$$R_{ab} = R_1 + R_{EQ2} + R_{EQ3} = 692,42 \Omega$$

Questão 2)

Pela lei de Kirchoff do nós:

$$i = i_1 + i_2 + i_3$$

E sabendo que $i = 5\text{ A}$, $i_1 = 1\text{ A}$ e $i_3 = 1,8\text{ A}$:

$$i_2 = i - i_1 - i_3 = 5 - 1 - 1,8 = 2,2\text{ A}$$

A queda de tensão nos resistores é a mesma, já que estes estão em paralelo. A tensão $V = 10\text{ V}$, portanto pela lei de Ohm, temos:

$$R_1 = \frac{V}{i_1} = \frac{10}{1} = 10\ \Omega$$

$$R_2 = \frac{V}{i_2} = \frac{10}{2,2} = 4,54\ \Omega$$

$$R_3 = \frac{V}{i_3} = \frac{10}{1,8} = 5,56\ \Omega$$

Questão 3)

A corrente em R_2 é 3 A , portanto, pela lei de Ohm:

$$V_{R2} = R_2 \times i_2 = 4 \times 3 = 12\text{ V}$$

Como os resistores estão em paralelo a tensão sobre ele é a mesma, então:

$$V_{R1} = V_{R2} = V_{R3} = 12\text{ V}$$

De posse da tensão sobre cada resistor, podemos calcular a corrente que os percorre, assim:

$$i_1 = \frac{V_{R1}}{R_1} = \frac{12}{2} = 6\text{ A}$$

$$i_2 = 3\text{ A} \rightarrow \text{já especificado}$$

$$i_3 = \frac{V_{R3}}{R_3} = \frac{12}{6} = 2\text{ A}$$

O circuito é um divisor de corrente, portanto, a corrente da fonte I_1 , se divide pelas resistências, de forma a atender:

$$I_1 = i_1 + i_2 + i_3 = 6 + 3 + 2 = 11\text{ A}$$

Questão 4)

OBS.: Adotando o sentido horário para as resoluções.

a) O circuito é composto por 3 malhas, assim temos as correntes de malha I_1 , I_2 e I_3 .

Equacionando a primeira malha, temos:

$$-V_1 + R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) + V_2 = 0$$

Rearranjando os termos:

$$I_1(R_1 + R_2) - R_2 I_2 + 0 I_3 = V_1 - V_2$$

Substituindo os valores:

$$I_1(1k + 1k) - 1k I_2 + 0 I_3 = 12 - 10$$

$$I1(2k) - 1kI2 + 0I3 = 2$$

Equacionando a segunda malha, temos:

$$-V_2 + R_2(I2 - I1) + R_3I2 + R_4(I2 - I3) = 0$$

Rearranjando os termos:

$$-R_2I1 + I2(R_2 + R_3 + R_4) - R_4I3 = V_2$$

Substituindo os valores:

$$-1kI1 + I2(1k + 1k + 1k) - 1kI3 = 10$$

$$-1kI1 + I2(3k) - 1kI3 = 10$$

Equacionando a terceira malha, temos:

$$-V_3 + R_4(I3 - I2) + R_5I3 = 0$$

Rearranjando os termos:

$$0I1 - R_4I2 + I3(R_4 + R_5) = V_3$$

Substituindo os valores:

$$0I1 - 1kI2 + I3(1k + 1k) = 12$$

$$0I1 - 1kI2 + I3(2k) = 12$$

A partir do equacionamento das malhas, temos o sistema linear formado pelas equações abaixo:

$$I1(2k) - 1kI2 + 0I3 = 2$$

$$-1kI1 + I2(3k) - 1kI3 = 10$$

$$0I1 - 1kI2 + I3(2k) = 12$$

Para a resolução do sistema linear, será utilizado o método de Cramer, que é utilizado para a resolução de sistemas lineares 3x3.

O sistema linear na forma matricial é então:

$$\begin{bmatrix} 2k & -1k & 0 \\ -1k & 3k & -1k \\ 0 & -1k & 2k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ 12 \end{bmatrix}$$

A método de Cramer diz que cada incógnita pode ser calculada da seguinte forma:

$$Incógnita = \frac{\det(A \text{ com a coluna trocada})}{\det(A)}$$

Onde A é matriz formada pelos valores que acompanham as incógnitas, e a matriz A com a coluna trocada, é a matriz cuja coluna é substituída pelo vetor coluna de resultado (A matriz coluna formada pelos elementos após a igualdade). Isso quer dizer que, para I1, a coluna 1 de A será substituída, para I2, a coluna 2 será substituída e para I3 a coluna 3 será substituída.

Calculando as correntes:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1k & 0 \\ 10 & 3k & -1k \\ 12 & -1k & 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k & -1k & 0 \\ -1k & 3k & -1k \\ 0 & -1k & 2k \end{vmatrix}} = 5,25 \text{ mA}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2k & 2 & 0 \\ -1k & 10 & -1k \\ 0 & 12 & 2k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k & -1k & 0 \\ -1k & 3k & -1k \\ 0 & -1k & 2k \end{vmatrix}} = 8,5 \text{ mA}$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 2k & -1k & 2 \\ -1k & 3k & 10 \\ 0 & -1k & 12 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2k & -1k & 0 \\ -1k & 3k & -1k \\ 0 & -1k & 2k \end{vmatrix}} = 10,25 \text{ mA}$$

b) O circuito possui duas malhas, portanto, duas correntes de malha, I_1 e I_2 .

Equacionando a primeira malha:

$$-V_1 + R_1 I_1 + R_2 (I_1 - I_2) = 0$$

Rearrajando os termos:

$$I_1 (R_1 + R_2) - R_2 I_2 = V_1$$

Substituindo os valores:

$$I_1 (3 + 2) - 2 I_2 = 12$$

$$I_1 (5) - 2 I_2 = 12$$

Equacionando a segunda malha:

$$V_2 + R_2 (I_2 - I_1) + R_3 I_2 = 0$$

Rearrajando os termos:

$$-R_2 I_1 + I_2 (R_2 + R_3) = -V_2$$

Substituindo os valores:

$$-2 I_1 + I_2 (2 + 4) = -4$$

$$-2 I_1 + I_2 (6) = -4$$

A partir da análise de malhas para o circuitos, temos o seguinte sistema linear como resultado:

$$I_1 (5) - 2 I_2 = 12$$

$$-2 I_1 + I_2 (6) = -4$$

Resolvendo o sistema linear:

$$I1 = 2,4615 A$$

$$I2 = 0,1538 A$$

c) O circuito é composto por 3 malhas, portanto, as correntes de malha são $I1$, $I2$ e $I3$.

OBS.: Malha 1, contém a fonte $V1$, malha 2, contém a fonte $V2$ e malha 3, não possui fonte.

Equacionando a primeira malha:

$$-V_1 + R_1(I1 - I2) + R_2(I1 - I3) = 0$$

Rearrajando os termos:

$$I1(R_1 + R_2) - I2(R_1) - I3(R_2) = V_1$$

Substituindo os valores:

$$I1(5 + 3) - I2(5) - I3(3) = 10$$

$$I1(8) - I2(5) - I3(3) = 10$$

Equacionando a segunda malha:

$$-V_2 + R_1(I2 - I1) + R_3(I2 - I3) = 0$$

Rearrajando os termos:

$$-I1(R_1) + I2(R_1 + R_3) - R_3I3 = V_2$$

Substituindo os valores:

$$-I1(5) + I2(5 + 8) - I3(8) = 20$$

$$-I1(5) + I2(13) - I3(8) = 20$$

Equacionando a terceira malha:

$$R_2(I3 - I1) + R_3(I3 - I2) + R_4(I3) = 0$$

Rearrajando

os

termos:

$$-I1(R_2) - I2(R_3) + I3(R_2 + R_3 + R_4) = 0$$

Substituindo os valores:

$$-I1(3) - I2(8) + I3(3 + 8 + 6) = 0$$

$$-I1(3) - I2(8) + I3(17) = 0$$

A partir da análise de malhas, obtemos o seguinte sistema linear:

$$I1(8) - I2(5) - I3(3) = 10$$

$$-I1(5) + I2(13) - I3(8) = 20$$

$$-I1(3) - I2(8) + I3(17) = 0$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 8 & -5 & -3 \\ -5 & 13 & -8 \\ -3 & -8 & 17 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Utilizando o método de Cramer:

$$I1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -5 & -3 \\ 20 & 13 & -8 \\ 0 & -8 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 & -3 \\ -5 & 13 & -8 \\ -3 & -8 & 17 \end{vmatrix}} = 7,9114 \text{ A}$$

$$I2 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 10 & -3 \\ -5 & 20 & -8 \\ -3 & 0 & 17 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 & -3 \\ -5 & 13 & -8 \\ -3 & -8 & 17 \end{vmatrix}} = 7,6582 \text{ A}$$

$$I3 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & -5 & 10 \\ -5 & 13 & 20 \\ -3 & -8 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & -5 & -3 \\ -5 & 13 & -8 \\ -3 & -8 & 17 \end{vmatrix}} = 5 \text{ A}$$

d) O circuito é composto por 2 malhas, então as correntes de malhas são $I1$ e $I2$.

Equacionando a primeira malha:

$$V_1 + R_1 I1 + V_2 + R_2 (I1 - I2) = 0$$

Rearranjando os termos:

$$I1(R_1 + R_2) - I2(R_2) = -V_1 - V_2$$

Substituindo os valores:

$$I1(2 + 4) - I2(4) = -6 - 4$$

$$I1(6) - I2(4) = -10$$

Equacionando a segunda malha:

$$R_2 (I2 - I1) - V_2 + R_3 I2 + V_3 = 0$$

Rearrajando os termos:

$$-I1(R_2) + I2(R_2 + R_3) = V_2 - V_3$$

Substituindo os valores:

$$-I1(4) + I2(4 + 6) = 4 - 3$$

$$-I1(4) + I2(10) = 1$$

A partir da análise das malhas, obtemos o seguinte sistema linear:

$$I_1(6) - I_2(4) = -10$$

$$-I_1(4) + I_2(10) = 1$$

Resolvendo o sistema linear:

$$I_1 = -2,1818 \text{ A}$$

$$I_2 = -0,7727 \text{ A}$$

Questão 5)

a) O circuito possui 2 nós, portanto V_1 e V_2 .

No nó V_1 , temos a corrente I_1 entrando no nó, e vamos considerar as correntes que passam por R_1 e R_3 saindo do nó, portanto:

$$I_1 = I_{R_1} + I_{R_3}$$

As correntes I_{R_1} e I_{R_3} , são dadas por:

$$I_{R_1} = \frac{V_1}{R_1}$$

$$I_{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$

Substituindo na primeira equação:

$$I_1 = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$

Rearrajando a equação, obtemos:

$$R_1 R_3 I_1 = R_3 V_1 + R_1 V_1 - R_1 V_2$$

$$R_1 R_3 I_1 = (R_3 + R_1) V_1 - R_1 V_2$$

Substituindo os valores:

$$(8 + 4)V_1 - (8)V_2 = 8 \times 4 \times 6$$

$$(12)V_1 - (8)V_2 = 192$$

No nó V_2 , a corrente I_2 está saindo do nó. Considerando A corrente em R_3 entrando no nó e a corrente de R_2 saindo do nó, temos:

$$I_{R_3} = I_{R_2} + I_2$$

Sabendo que:

$$I_{R_3} = \frac{V_1 - V_2}{R_3}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_2}{R_2}$$

Temos:

$$\frac{V1 - V2}{R_3} = \frac{V2}{R_2} + I2$$

Rearranjando os termos:

$$V1 - V2 = \frac{V2}{R_2} \times R_3 + R_3 I2$$

$$V1 - V2 - \frac{V2}{R_2} \times R_3 = R_3 I2$$

$$V1 - V2 \left(1 + \frac{R_3}{R_2}\right) = R_3 I2$$

Substituindo os valores:

$$V1 - V2 \left(1 + \frac{4}{2}\right) = 4 \times 10$$

$$V1 - V2(3) = 40$$

Fazendo a análise dos nós obtemos o seguinte sistema linear:

$$(12)V1 - (8)V2 = 192$$

$$V1 - V2(3) = 40$$

Resolvendo o sistema linear:

$$V1 = 9,1429 \text{ V}$$

$$V2 = -10,2857 \text{ V}$$

b) O circuito possui dois nós, $V1$ e $V2$

Para o nó $V1$, a corrente $I1$ está entrando no nó. Considerando então a corrente I_{R_1} e corrente que passa pela fonte Vf saindo do nó, temos:

$$I1 = I_{R_1} + If$$

Sabendo que:

$$I_{R_1} = \frac{V1}{R_1}$$

Substituindo na primeira equação:

$$I1 = \frac{V1}{R_1} + If$$

Rearrajando os termos:

$$R_1 I1 = V1 + R_1 If$$

Substituindo os valores:

$$10 \times 5 = V1 + 10 If$$

$$50 = V1 + 10If$$

Para o nó $V2$, If e $I2$ estão entrando no nó e I_{R_2} está saindo do nó, assim:

$$I_{R_2} = If + I2$$

Sabendo que:

$$I_{R_2} = \frac{V2}{R_2}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{V2}{R_2} = If + I2$$

Rearrajando a equação:

$$V2 = R_2 If + R_2 I2$$

Substituindo os valores:

$$V2 = 5If + 5 \times 2$$

$$V2 = 5If + 10$$

Sabe-se ainda que:

$$V2 - V1 = 8 \rightarrow -V1 + V2 = 8$$

Isolando If na equação para o nó $V2$, temos:

$$If = \frac{V2 - 10}{5}$$

Substituindo If na equação para o nó $V1$, temos:

$$50 = V1 + 10If$$

$$50 = V1 + 10\left(\frac{V2 - 10}{5}\right)$$

$$50 = V1 + 2(V2 - 10)$$

$$50 = V1 + 2V2 - 20$$

$$70 = V1 + 2V2$$

$$V1 + 2V2 = 70$$

Para a análise nodal, temos o sistema linear:

$$-V1 + V2 = 8$$

$$V1 + 2V2 = 70$$

Resolvendo o sistema linear:

$$V1 = 18 \text{ V}$$

$$V2 = 26 \text{ V}$$

c) O circuito possui 4 nós especificados V_1 , V_2 , V_3 e V_4 .

Analisando o circuito vemos que, $V_1 = 10\text{ V}$ e $V_4 = 0\text{ V}$, portanto temos somente 2 nós para serem equacionados.

Para o nó V_2 . Considerando a corrente no resistor R_1 entrando e as correntes nos resistores R_2 e R_4 saindo, temos:

$$I_{R_1} = I_{R_2} + I_{R_4}$$

Sabendo que:

$$I_{R_1} = \frac{10 - V_2}{R_1}$$

$$I_{R_4} = \frac{V_2}{R_4}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_2 - V_3}{R_2}$$

Substituindo na primeira equação:

$$\frac{10 - V_2}{R_1} = \frac{V_2 - V_3}{R_2} + \frac{V_2}{R_4}$$

Rearrajando os termos:

$$10 = V_2 + R_1 \times \frac{V_2 - V_3}{R_2} + R_1 \times \frac{V_2}{R_4}$$

$$V_2 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4} \right) - \frac{V_3 \times 2}{3} = 10$$

Substituindo os valores:

$$V_2 \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \right) - \frac{V_3 R_1}{R_2} = 10$$

Para V_3 . A corrente I_{R_2} está entrando no nó e as correntes I_{R_5} e I_{R_3} estão saindo do nó.

$$I_{R_2} = I_{R_5} + I_{R_3}$$

Sabe-se que:

$$I_{R_2} = \frac{V_2 - V_3}{R_2}$$

$$I_{R_5} = \frac{V_3}{R_5}$$

$$I_{R_3} = \frac{V_3}{R_3}$$

Substituindo:

$$\frac{V_2 - V_3}{R_2} = \frac{V_3}{R_5} + \frac{V_3}{R_3}$$

Rearrajando os termos:

$$\frac{V_2}{R_2} - \frac{V_3}{R_2} - \frac{V_3}{R_5} - \frac{V_3}{R_3} = 0$$
$$\frac{V_2}{R_2} - V_3 \left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} + \frac{1}{R_3} \right) = 0$$

Substituindo os valores:

$$\frac{V_2}{3} - V_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + 1 \right) = 0$$

Resulta no seguinte sistema linear:

$$V_2 \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{6} \right) - \frac{V_3 \times 2}{3} = 10$$
$$\frac{V_2}{3} - V_3 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{7} + 1 \right) = 0$$

Resolvendo o sistema linear, temos:

$$V_1 = 5,4070 \text{ V}$$

$$V_2 = 1,2209 \text{ V}$$

Questão 6)

- a) O circuito possui 3 ramos, considerando o sentido da corrente no ramo que possui a fonte de 2 V entrando no nó(I1), no que possui a fonte de 6 V também entrando no nó(I2) e a corrente que percorre R_3 saindo do nó(I3), temos:

$$I_3 = I_1 + I_2$$

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

Analisando a malha 1(à esquerda):

$$-V_1 + R_1 I_1 + R_2 I_3 = 0$$

Substituo os valores:

$$-2 + 2I_1 + 4I_3 = 0$$

$$2I_1 + 0I_2 + 4I_3 = 2$$

Analisando a malha 1(à direita):

$$V_2 - R_2 I_3 + R_3 I_2 = 0$$

Substituo os valores:

$$6 - 4I_3 - 1I_2 = 0$$

$$0I_1 - 1I_2 - 4I_3 = -6$$

A partir da análise dos ramos, temos o sistema linear:

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$2I1 + 0I2 + 4I3 = 2$$

$$0I1 - 1I2 - 4I3 = -6$$

Utilizando o método de Cramer:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$I1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ -6 & -1 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}} = -1 \text{ A}$$

$$I2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}} = 2 \text{ A}$$

$$I3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \end{vmatrix}} = 1 \text{ A}$$

b) O circuito possui 3 ramos.

Considerando as correntes que percorrem os resistores R_1 e R_3 , $I1$ e $I3$ respectivamente, entrando no nó, e a corrente que percorre $R_2(I2)$, saindo do nó, temos:

$$I1 + I3 = I2$$

$$I1 - I2 + I3 = 0$$

Equacionando a malha 1:

$$-V2 + R_1I1 + R_2I2 + V2 = 0$$

Substituindo os valores:

$$-15 + 4I1 + 10I2 + 20 = 0$$

$$4I1 + 10I2 + 0I3 = -5$$

Equacionando a malha 2:

$$-V2 - R_2I2 - R_3I3 + V3 = 0$$

Substituindo os valores:

$$-20 - 10I2 - 5I3 + 40 = 0$$

$$0I1 - 10I2 - 5I3 = -20$$

A partir da análise, temos:

$$I1 - I2 + I3 = 0$$

$$4I1 + 10I2 + 0I3 = -5$$

$$0I1 - 10I2 - 5I3 = -20$$

Utilizando o método de Cramer:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & -5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I1 \\ I2 \\ I3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \\ -20 \end{bmatrix}$$

$$I1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -5 & 10 & 0 \\ -20 & -10 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = -2,5 \text{ A}$$

$$I2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & -20 & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = 0,5 \text{ A}$$

$$I3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 10 & -5 \\ 0 & -10 & -20 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & -5 \end{vmatrix}} = 3 \text{ A}$$

Questão 7)

- a) Substituindo a fonte de corrente($I1$) por um circuito aberto e a fonte de tensão($V2$) por um curto, a resistência pós $R1$ será:

$$R_{eq} = ((R_3 \parallel R_5) + R_2) \parallel R_4 = ((4 \parallel 12) + 5) \parallel 3 = (3 + 5) \parallel 3 = 2,18 \Omega$$

O circuito se torna um divisor de tensão entre $R1$ e R_{eq} . A tensão sobre R_{eq} é:

$$V_{R_{eq}} = \frac{R_{eq}}{R1 + R_{eq}} V1 = \frac{2,18}{6 + 2,18} 12 = 3,2 \text{ V}$$

Esta tensão está sobre $R_{eq} = ((R_3 \parallel R_5) + R_2) \parallel R_4$, ou seja, ela está sobre $((R_3 \parallel R_5) + R_2)$, assim, utilizando um divisor de tensão, é possível determinar a tensão R_2 .

$$V'_{R_2} = \frac{R_2}{(R_3 \parallel R_5) + R_2} V_{R_{eq}} = \frac{5}{(4 \parallel 12) + 5} 3,2 = 2 \text{ V}$$

Substituindo a fonte de corrente($I1$) por um circuito aberto e a fonte de tensão($V1$) por um curto, a resistência pós $R3$ será:

$$R_{eq} = ((R_1 \parallel R_4) + R_2) \parallel R_5 = ((6 \parallel 3) + 5) \parallel 12 = (2 + 5) \parallel 12 = 4,42 \Omega$$

O circuito se torna um divisor de tensão entre R_1 e R_{eq} . A tensão sobre R_{eq} é:

$$V_{R_{eq}} = \frac{R_{eq}}{R_3 + R_{eq}} V_1 = \frac{4,42}{4 + 4,42} 19 = 9,975 \text{ V}$$

Esta tensão está sobre $R_{eq} = ((R_1 \parallel R_4) + R_2) \parallel R_5$, ou seja, ela está sobre $((R_1 \parallel R_4) + R_2)$, assim, utilizando um divisor de tensão, é possível determinar a tensão R_2 .

$$V_{R_2}'' = \frac{R_2}{(R_1 \parallel R_4) + R_2} V_{R_{eq}} = 7,125 \text{ V}$$

Colocando as fonte de tensão em curto, temos:

$R_1 \parallel R_4$ e $R_3 \parallel R_5 \rightarrow$ essas associações estão em série entre si, portanto, temos um divisor de corrente formado por R_2 e $(R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_5)$

Então a corrente de R_2 , será dada por:

$$I_{R_2} = \frac{(R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_5)}{(R_1 \parallel R_4 + R_3 \parallel R_5) + R_2} I_1 = \frac{(2 + 3)}{(2 + 3) + 5} 2 = 1 \text{ A}$$

Então:

$$V_{R_2}''' = R_2 I_{R_2} = 5 \times 1 = 5 \text{ V}$$

Pelo teorema da superposição:

Considerando a queda de tensão do nó que contém R_4 para o nó que contém R_5 :

$$V_{R_2} = V_{R_2}' - V_{R_2}'' + V_{R_2}''' = 2 - 7,125 + 5 = -0,125 \text{ V}$$

$V_{R_2}'' \rightarrow$ listado como negativo, pois a polaridade está no sentido oposto ao adotado na análise.

b) Substituindo a fonte I_1 por um circuito aberto:

A queda de tensão de R_5 , pode ser calculada a partir de um divisor de tensão.

$$V_{R_5}' = \frac{R_5}{(R_1 + R_2 + R_5)} V_1 = \frac{8}{(5 + 2 + 8)} 20 = 10,67 \text{ V}$$

Substituindo a fonte V_1 por um curto, podemos determinar a corrente sobre R_5 .

$$I_{R_5} = \frac{R_2}{(R_1 + R_5) + R_2} I_1 = \frac{R_2}{(5 + 8) + 2} 4 = 0,533 \text{ A}$$

$$V_{R_5}'' = I_{R_5} R_5 = 4,27 \text{ V}$$

Como as tensões estão em sentidos diferentes:

$$V_{R_5} = V_{R_5}' - V_{R_5}'' = 10,67 + 4,27 = 6,4 \text{ V}$$

c) Substituindo as fontes de corrente por um circuito aberto:

A resistência equivalente anterior a R_3 é:

$$R_{eq} = (R_1 + R_2) \parallel R_4 = (4 + 2) \parallel 6 = 3 \Omega$$

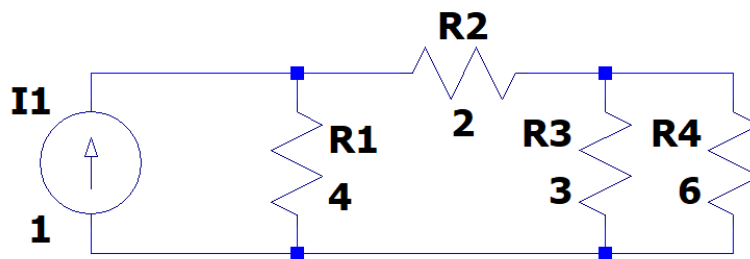
A tensão sobre R_3 , pode ser calculada por um divisor de tensão, e como $R_{eq} = R_3$:

$$V'_{R_3} = \frac{V_1}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ V}$$

Substituindo V_1 por um curto e I_2 por um circuito aberto. Temos um divisor de corrente formado pelos resistores R_4 em um ramo, $(R_1 + R_2)$ em outro ramo e por fim R_3 no último ramo. A resistência equivalente R_{eq} entre os ramos que contém R_4 e $(R_1 + R_2)$ é 3Ω , pois $(R_1 + R_2) = R_4$. Como $R_{eq} = R_3$, a corrente que passa por R_3 é metade da corrente da fonte, portanto 1 A .

Então, $V''_{R_3} = R_3 \times 1 = 3 \times 1 = 3 \text{ V}$.

Substituindo V_1 por um curto e I_1 por um circuito aberto. Temos o circuito abaixo redesenhado:



Onde temos uma resistência equivalente que relaciona R_2 , R_3 e R_4 :

$$R_{eq} = R_2 + (R_3 \parallel R_4) = 2 + (3 \parallel 6) = 2 + 2 = 4 \Omega$$

Assim o circuito torna-se um divisor de corrente com duas resistências iguais, já que $R_{eq} = R_1$. Portanto, a corrente que flui sobre R_{eq} é $0,5 \text{ A}$. Esta corrente percorre R_2 e se divide em R_3 e R_4 . Então podemos aplicar o divisor de corrente mais uma vez:

$$I_{R_3} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} 0,5 = \frac{6}{3 + 6} 0,5 = 0,33 \text{ A}$$

$$V'''_{R_3} = R_3 I_{R_3} = 0,99 \text{ V} \approx 1 \text{ V}$$

Das análises das fontes, as tensões V'_{R_3} e V'''_{R_3} estão no mesmo sentido. Determinados pelos sentidos das fontes V_1 e I_2 . Já V''_{R_3} está no sentido contrário, o que é visto quando olhamos para o circuito original, onde está sendo considerada uma queda de tensão com relação ao nó que conecta R_2 e R_3 para o terra, então:

$$V_{R_3} = V'_{R_3} - V''_{R_3} + V'''_{R_3} = 10 - 3 + 1 = 8 \text{ V}$$

Questão 8)

a) Substituindo as fontes de tensão por um curto:

$$R_{TH} = R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{R_1}\right) + \left(\frac{1}{R_2}\right) + \left(\frac{1}{R_3}\right)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5k}\right) + \left(\frac{1}{20k}\right) + \left(\frac{1}{40k}\right)} = 3.636,36 \Omega$$

Podemos aplicar o método dos nós para determinar a tensão $V_{ab} = V_{R_3} = V_{TH}$.

Para V_N (nó entre R_1 e V_2):

$$I_{R_1} = I_{R_2} + I_{R_3}$$

$$I_{R_1} = \frac{V_1 - V_N}{R_1} = \frac{30 - V_N}{5k}$$

$$I_{R_2} = \frac{V_N}{R_2} = \frac{V_N}{20k}$$

$$I_{R_3} = \frac{V_N + V_2}{R_3} = \frac{V_N + 10}{40k}$$

Assim:

$$\frac{30 - V_N}{5k} = \frac{V_N}{20k} + \frac{V_N + 10}{40k}$$

$$\frac{V_N}{20k} \times 5k + \frac{V_N + 10}{40k} \times 5k = 30 - V_N$$

$$\frac{V_N}{4} + \frac{V_N}{8} + \frac{10}{8} = 30 - V_N$$

$$\frac{V_N}{4} + \frac{V_N}{8} + V_N = 30 - \frac{10}{8}$$

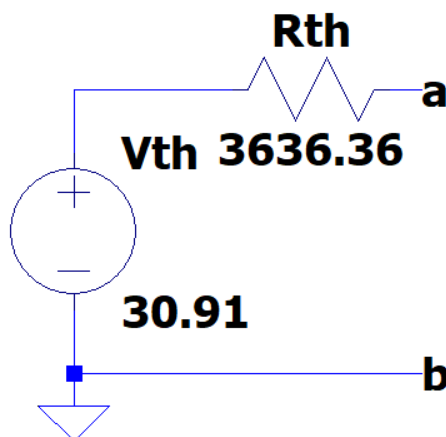
$$V_N \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 1 \right) = 28,75$$

$$V_N = \frac{28,75}{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 1 \right)} = 20,91$$

Então:

$$I_{R_3} = \frac{V_N + 10}{40k} \rightarrow V_{R_3} = V_N + 10 = 20,91 + 10 = 30,91 \text{ V}$$

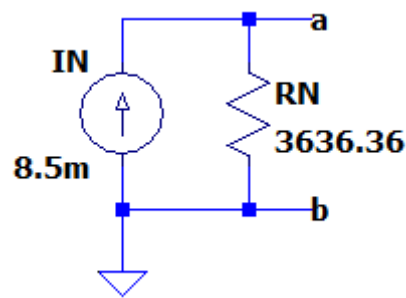
$$V_{TH} = 30,91 \text{ V}$$



A resistência de Thévenin é a mesma de Norton, portanto, $R_N = R_{TH} = 3636,36 \Omega$.

A corrente de Norton, então, pode ser calculada:

$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{30,91}{3636,36} = 8,5 \text{ mA}$$



- b)** Substituindo a fonte de tensão por um curto e a fonte de corrente por um circuito aberto, a $R_{TH} = R_N = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{300 \times 560}{300 + 560} = 195,35 \Omega$.

V_{TH} , pode ser calculada utilizando análise nodal.

Considerando I_{R_1} e I_1 entrando no nó e I_{R_2} saindo do nó:

$$I_{R_2} = I_{R_1} + I_1$$

$$I_{R_2} = \frac{VN}{R_2}$$

$$I_{R_1} = \frac{V1 - VN}{R_1}$$

$$\frac{VN}{R_2} = \frac{V1 - VN}{R_1} + I_1$$

$$VN = \frac{(V1 - VN)R_2}{R_1} + R_2 I_1$$

$$VN = \frac{V1 R_2}{R_1} - \frac{VN R_2}{R_1} + R_2 I_1$$

$$VN + \frac{VN R_2}{R_1} = \frac{V1 R_2}{R_1} + R_2 I_1$$

Substituindo os valores:

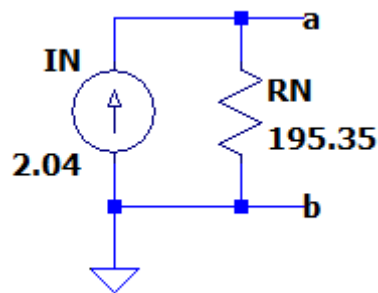
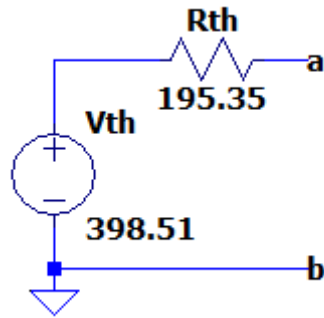
$$VN + \frac{VN 560}{300} = \frac{12 \times 560}{300} + 560 \times 2$$

$$VN \left(1 + \frac{560}{300} \right) = 1142,4$$

$$VN = \frac{1142,4}{\left(1 + \frac{560}{300} \right)} = 398,51 \text{ V}$$

Como $V_{TH} = V_{ab} = VN = 398,51 \text{ V}$

$$\text{Assim, } I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{398,51}{195,35} = 2,04 \text{ A}$$



Questão 9)

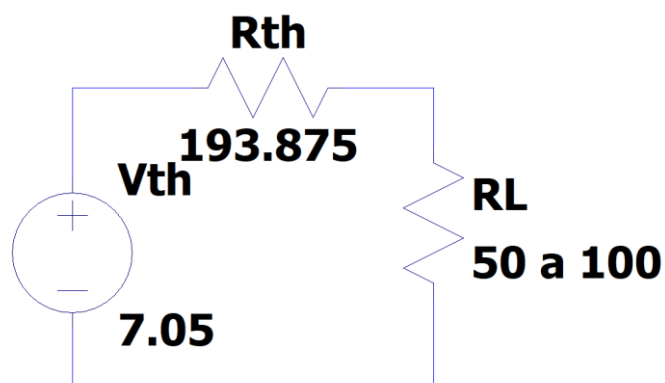
Para determinar R_{TH} , trocamos fonte de tensão por um curto, edo ponto de vista de R_L , temos:

$$R_{TH} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{330 \times 470}{330 + 470} = 193,875 \Omega$$

Como a resistência de Thévenin é analisada do ponto de vista da carga, R_{TH} é a mesma para qualquer valor de carga.

Do ponto de vista carga, retirando-a, a V_{TH} é a tensão em cima de R_2 , que pode ser calculada por um divisor de tensão:

$$V_{TH} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 = \frac{470}{330 + 470} 12 = 7,05 V$$



A tensão V_L pode ser calculada então por um divisor de tensão:

$$V_L = \frac{R_L}{R_{th} + R_L} V_{TH}$$

Para $R_L = 50 \Omega$:

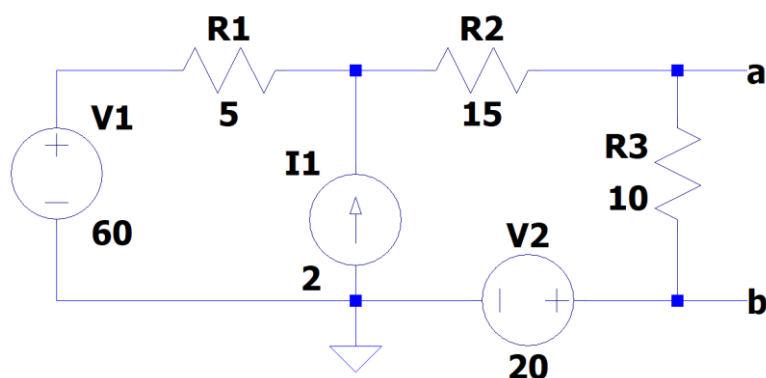
$$V_L = \frac{50}{193,875 + 50} = 1,445 \text{ V}$$

Para $R_L = 100 \Omega$:

$$V_L = \frac{100}{193,875 + 100} = 2,399 \text{ V}$$

Portanto V_L , varia de 1,445 V a 2,399 V, para R_L de 50 Ω a 100 Ω .

Questão 10)



O circuito acima, representa o circuito elétrico em a carga R_L , para determinar o equivalente de Thévenin.

Como uma fonte de tensão é substituída por um curto e uma fonte de corrente por um circuito aberto, temos:

$$R_{TH} = R_{ab} = R_3 \parallel (R_1 + R_2) = 10 \parallel (5 + 15) = 10 \parallel 20 = 6,67 \Omega$$

Para V_{TH} , podemos fazer uma análise nodal para determinar a corrente que passa por R_3 , e assim determinar sua queda de tensão, a qual representa V_{TH} .

Nomeando o nó como VN (nó entre os resistores R_1 e R_2), temos:

$$I_1 + I_{R_1} = I_{R_2+R_3}$$

Sabe-se que:

$$I_{R_1} = \frac{V_1 - VN}{R_1} = \frac{60 - VN}{5} = 12 - \frac{VN}{5}$$

$$I_{R_2+R_3} = \frac{VN - V_2}{R_2 + R_3} = \frac{VN - 20}{15 + 10} = \frac{VN - 20}{25}$$

Substituindo:

$$I_1 + \left(12 - \frac{VN}{5}\right) = \frac{VN - 20}{25}$$

$$2 + \left(12 - \frac{VN}{5}\right) = \frac{VN - 20}{25}$$

$$2 + 12 - \frac{VN}{5} = \frac{VN - 20}{25}$$

$$\left(14 - \frac{VN}{5}\right) 25 = VN - 20$$

$$350 - 5VN = VN - 20$$

$$350 + 20 = 6VN$$

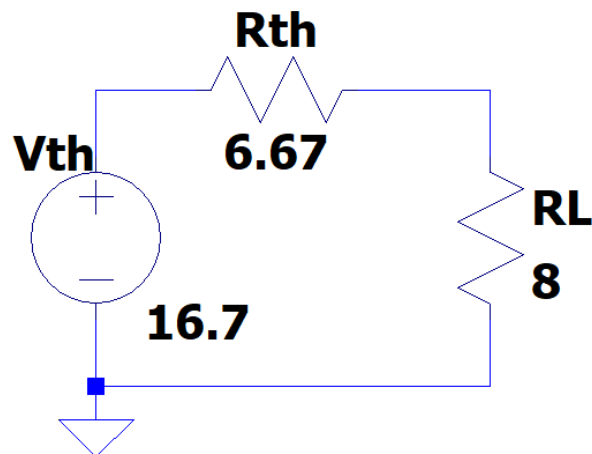
$$VN = \frac{370}{6} = 61,67 \text{ V}$$

Então:

$$I_{R_2+R_3} = \frac{VN - 20}{25} = \frac{61,67 - 20}{25} = 1,67 \text{ A}$$

A tensão de Thévenin, então:

$$V_{TH} = V_{R_3} = R_3 \times I_{R_2+R_3} = 10 \times 1,67 = 16,7 \text{ V}$$

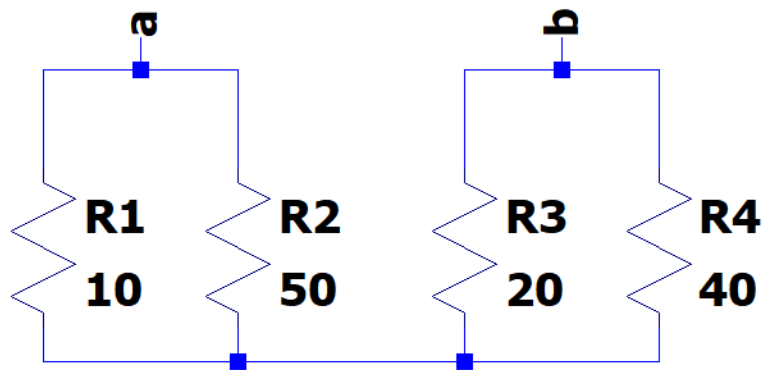


Por fim, a tensão sobre R_L , será dada por divisor de tensão:

$$V_{R_L} = \frac{R_L}{R_{TH} + R_L} V_{TH} = \frac{8}{6,67 + 8} 16,7 = 9,11 \text{ V}$$

Questão 11)

Substituindo a fonte de tensão por um curto, R_{TH} será dado por:



$$R_{TH} = (R_1 \parallel R_2) + (R_3 \parallel R_4) = (10 \parallel 50) + (20 \parallel 40) = 21,67 \, \Omega$$

V_{TH} , é dado por $V_a - V_b$, de forma que cada um se calcula por um divisor de tensão:

$$V_{TH} = V_a - V_b = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 - \frac{R_4}{R_3 + R_4} V_1 = V_1 \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) = 9 \left(\frac{50}{10 + 50} - \frac{40}{20 + 40} \right)$$

$$V_{TH} = 1,5 \, V$$

